Concepts de base de la sémantique formelle

Alain Lecomte
Université Paris 8

Outline

Conditions de vérité

Connaître la signification d’une phrase = savoir sous quelles conditions elle est vraie
On oppose (cf. Recanati, 2008):

- sémantique référentielle
- sémantique cognitive

Conception tarskienne de la vérité

”les JSM sont organisées en 2010 en Lorraine” est vrai
ssi
les JSM sont organisées en 2010 en Lorraine

Conception ”décitationnelle”
schéma T
Définir la vérité dans le cas de langages formalisés, cf. Tarski, 1972

Contradiction due à l’auto-référence

A = “A n’est pas une proposition vraie”

alors :

“A n’est pas une proposition vraie” est vraie

si et seulement si

A n’est pas une proposition vraie

autrement dit, par remplacement:

A est vraie

si et seulement si

A n’est pas vraie

Langage objet et métalangage

Example

- Langage objet :
  - N (négation), A (disjonction), Π (quantification universelle), I (inclusion)
  - variables: $x_{|}$, $x_{||}$, $x_{|||}$, ..., $x_{||||...|}$ etc.
  - expressions bien formées : $Ix_{|}, x_{||}$; $NIx_{|}, x_{||}$; $\Pi x_{|} Ix_{|}, x_{|}$ etc.
- Métalangage : classes
  $\Pi x_{|} Ix_{|}, x_{|}$ *si et seulement si* $\forall X_1\ X_1 \subset X_1$

Rappels Logique des Prédicats du premier ordre

- des variables dites *individuelles* : $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...$; etc.
- des constantes individuelles (mais ce n'est pas indispensable)
- des lettres de prédicats, dotées chacune d'une *arité*
- les constantes logiques classiques:
  - connecteurs: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$
  - quantificateurs : $\forall, \exists$
- et bien sûr les signes de ponctuation ordinaires (parenthèses)

Example

$\forall x(\exists y A_{\backslash 2}(x, y) \Rightarrow B_{\backslash 1}(x))$

L-structure

$< D, I >$

- pour toute constante individuelle **c**, $I(\mathbf{c}) \in D$
- pour toute lettre de prédicat n-aire $A_{\backslash n}$, $I(A_{\backslash n}) \subset D^n$

Fonctions d’assignation $g : Var \longrightarrow D$

Vérité d'une formule par rapport à une structure

- **Termes**:
  - si ξ est une variable indiviuelle, $[[\xi]]^{M,g} = g(\xi)$
  - si **c** est une constante individuelle, $[[c]]^{M,g} = I(c)$
- **Formules atomiques**:
  si $A_{\backslash n}$ est une lettre de prédicat d'arité n et si $t_1, ..., t_n$ sont des termes, alors
  - $[[A_{\backslash n}(t_1, ..., t_n)]]^{M,g}$ = 1 ssi $([[t_1]], ..., [[t_n]]) \in I(A_{\backslash n})$
- $[[A \wedge B]]^{M,g} = 1$ ssi $[[A]]^{M,g} = 1$ **et** $[[B]]^{M,g} = 1$
- $[[A \vee B]]^{M,g} = 1$ ssi $[[A]]^{M,g} = 1$ **ou** $[[B]]^{M,g} = 1$
- $[[A \Rightarrow B]]^{M,g} = 0$ ssi $[[A]]^{M,g} = 1$ **et** $[[B]]^{M,g} = 0$
- $[[\neg A]]^{M,g} = 1$ ssi $[[A]]^{M,g} = 0$
- $[[(\forall x)A]]^{M,g}]] = 1$ ssi pour toute assignation g' égale à g sauf éventuellement en x, $[[A]]^{M,g} = 1$
- $[[(\exists x)A]]^{M,g}]] = 1$ ssi il existe au moins une assignation g' égale à g sauf éventuellement en x telle que $[[A]]^{M,g} = 1$

Problèmes de la théorie des modèles

$\wedge \longrightarrow$ **et**
$\vee \longrightarrow$ **ou**
$\forall \longrightarrow$ **pour tout**
$\exists \longrightarrow$ **il existe**
Si un tel métalangage permet de définir la vérité dans L, **qu’en est-il de la vérité dans ce métalangage?**
langage $\rightarrow$ métalangage $\rightarrow$ méta-métalangage $\rightarrow$ **....**
grosse faiblesse de la logique classique...

La langue comme un langage formel?

- **ou bien** traduire d'abord les phrases d'une langue naturelle dans un langage prédicatif (ou bien dans un langage logique beaucoup plus riche, un langage intensionnel LI, comme dans l'approche de Richard Montague qui sera présentée par Laurent Roussarie) pour ensuite appliquer les règles récursives ci-dessus,
- **ou bien** considérer directement une langue naturelle comme un langage formel et donner une définition récursive de la vérité de ses phrases à partir de leurs règles de formation syntaxique.
  cf. Heim & Kratzer, 1998

Retour sur la dénotation

Frege : *Uber Sinn und Bedeutung*, signification =

- sens
- dénotation (ou référence)

quelle est la dénotation d'une proposition?
c'est la valeur de vérité de la proposition
NB: il existe des cas particuliers (phrases enchâssées) où la dénotation est le sens (la valeur de vérité n'est alors que la dénotation indirecte)
cf. *Paul croit que la Terre est plate*

Le principe de compositionnalité

la signification d’une expression est fonction des significations de ses composantes et de la manière dont celles-ci sont combinées

La dénotation des parties du discours

- termes singuliers (noms propres) $\longrightarrow$ éléments de l’univers
- termes généraux (noms communs, adjectifs, verbes intransitifs) $\longrightarrow$ ensembles inclus dans l’univers
- propositions $\longrightarrow$ valeurs de vérité

Fonction indicatrice d’un ensemble

$\mathbf{1}_E(x) = 1$ si et seulement si $x \in E$

Ensembles inclus dans D = Fonctions de D dans $\{0, 1\}$

Types

noms propres	$\mathbf{e}$	entités individuelles
propositions	$\mathbf{t}$	valeurs de vérité
termes généraux	$\mathbf{e} \to \mathbf{t}$	fonctions
verbes transitifs	$\mathbf{e} \to (\mathbf{e} \to \mathbf{t})$	fonctions ”curryfiées”
syntagmes nominaux	$(\mathbf{e} \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}$	fonctions ”du second ordre”

Cadres

Example

$D = \{a, b, c, d\}$
$E_1 = \{a, b\}, E_2 = \{a, c, d\}, E_3 = \{a, b, c\}, E_4 = \{c\}, E_5 = \{b, d\}$
$R_1 = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, d), (c, c), (d, d), (d, a), (d, b)\}$
$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
$R_3 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$
$T_1 = \{(a, a, a), (a, b, a), (a, b, c), (b, c, a), (b, d, d), (b, d, a)\}$
etc.

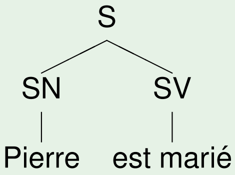
Fonctions d’interprétation et modèles

Example

Lexique :

Pierre, est marié

p = “Pierre est marié”, avec l’analyse syntaxique suivante (fig. 4)



Fonction I

Example

$I(Pierre) = b$
I(est marié) = E_5.
identique à : I(est marié) $=$ la fonction ϕ de D dans $\{0, 1\}$
définie par :

$$\begin{array}{ccc} a & \rightarrow & 0 \\ b & \rightarrow & 1 \\ c & \rightarrow & 0 \\ d & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Définition de la vérité dans un fragment de langue naturelle

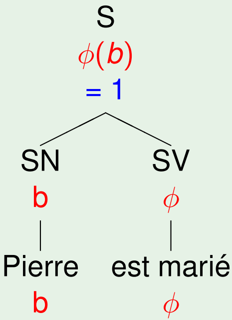
Example

Syntaxe : S $\rightarrow$ SN SV; SN $\rightarrow$ Pierre; SV $\rightarrow$ est marié
Vérité par rapport à M :

- Si τ a une racine étiquetée par S, et deux branches α, dont la racine est étiquetée NP et β, dont la racine est étiquetée VP, alors I(τ) = I(β)(I(α))
- Si τ a une racine étiquetée par N, et une branche α, simplement étiquetée par **Pierre**, alors I(τ) = I(**Pierre**)
- Si τ a une racine étiquetée par SV, et une branche α, simplement étiquetée par **est marié**, alors I(τ) = I(**est marié**)

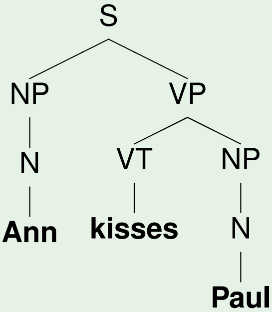
Exemple

Example



Plus difficile

Example

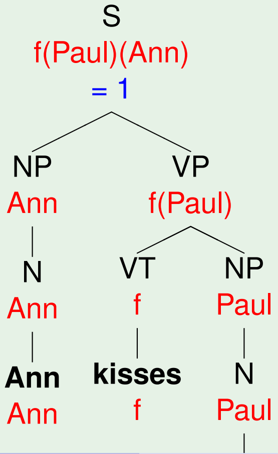


Verbes transitifs

I(**kisses**) = la fonction $f : D \longrightarrow \{0, 1\}^D$ telle que
• f(Ann) = la fonction $f_{Ann} : D \longrightarrow \{0, 1\}$ telle que
f_{Ann}(Ann) = 0, f_{Ann}(Mary) = 0, f_{Ann}(Paul) = 1, f_{Ann}(Ibrahim) = 0
• f(Mary) = la fonction $f_{Mary} : D \longrightarrow \{0, 1\}$ telle que
f_{Mary}(Ann) = 0, f_{Mary}(Mary) = 0, f_{Mary}(Paul) = 0, f_{Mary}(Ibrahim) = 1
• f(Paul) = la fonction $f_{Paul} : D \longrightarrow \{0, 1\}$ telle que
f_{Paul}(Ann) = 1, f_{Paul}(Mary) = 0, f_{Paul}(Paul) = 0, f_{Paul}(Ibrahim) = 0
• f(Ibrahim) = la fonction $f_{Ibrahim} : D \longrightarrow \{0, 1\}$ telle que
$f_{Ibrahim}$(Ann) = 0, $f_{Ibrahim}$(Mary) = 1, $f_{Ibrahim}$(Paul) = 0,
$f_{Ibrahim}$(Ibrahim) = 0

Calcul

Example



Ordre d’instanciation des variables

$y \longrightarrow \{x \longrightarrow aimer(x, y)\}$??
On écrit : $\lambda y.\lambda x.aimer(x, y)$

- $\lambda y.\lambda x.aimer(x, y)(\mathbf{p}) \longrightarrow \lambda x.aimer(x,\mathbf{p})$
- $\lambda x.aimer(x,\mathbf{p})(\mathbf{m}) \longrightarrow aimer(\mathbf{m}, \mathbf{p})$

λ-termes

- toute variable est un λ-terme
- si M et N sont des λ- termes, alors $(M\ N)$ est aussi un λ-terme,
- si M est un λ-terme et x une variable, alors $\lambda x.M$ est un λ-terme
- il n’y a pas d’autre manière de construire un λ-terme que par les trois clauses ci-dessus

β-conversion :
$(\lambda x.M\ N) \rightarrow M[x := N]$
$M[x := N]$: substitution de x par N dans M partout où il apparaît.
η-conversion :
$\lambda x.(f\ x) \rightarrow f$
η-expansion la règle inverse.

Types

Soit *A* un ensemble de types primitifs (atomiques)

1. $\forall t \in A$, t est un type ($t \in Typ$)
2. $\forall \alpha, \beta \in Typ, (\alpha \rightarrow \beta) \in Typ$

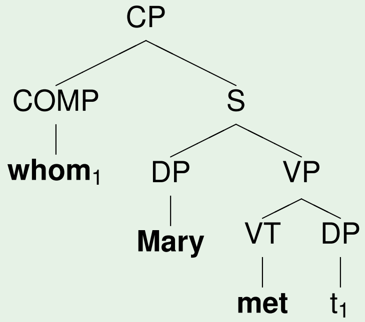
λ-termes typés

- toute variable de type α est un λ-terme de type α
- si *M* et *N* sont des λ termes respectivement de types $\alpha \to \beta$ et α, alors (*M N*) est un λ-terme de type β
- si *M* est un λ-terme de type β et *x* une variable de type α, alors $\lambda x.M$ est un λ-terme de type $\alpha \to \beta$

Abstraction de prédicat

The man **whom** Mary met

Example

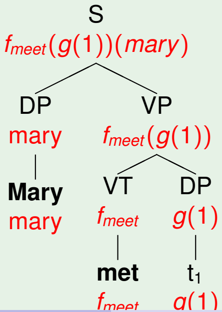


Fonctions d’assignation

$$[[t_i]]^{M,g} = g(i)$$

Example

Interprétation par rapport à M, g :



Abstraction de prédicat

cf. Heim & Kratzer

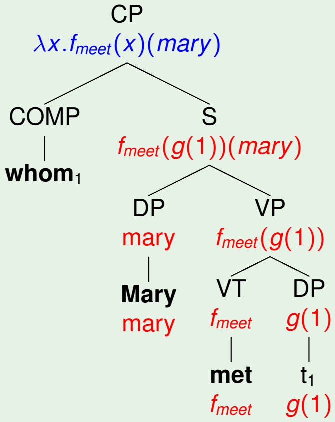
Abstraction de prédicat :

Si α est un noeud branchant dont les descendants sont : un pronom relatif et un sous-arbre $\beta(t_i)$, alors $[[\alpha]]^M$ = $\lambda x.[[\beta(t_i)]]^{M,g[i:=x]}$

où $[[.]]^{M,g[i:=x]}$ = interprétation relativement à une structure M et à une fonction d’assignation g modifiée en i de manière à assigner la valeur de la variable x à t_i.

Interprétation d’une relative

Example



Nom modifié

Modification de prédicat (Heim & Kratzer)

Example